-EXERCICE 29.4-

• ENONCE :

« Guide d'onde coaxial »

On considère un câble coaxial constitué d'un cylindre métallique plein de rayon a (= « âme » du câble), entouré d'un cylindre métallique creux coaxial de rayon b ; le milieu compris entre les deux cylindres est constitué de polyéthylène dont les caractéristiques électromagnétiques seront celles du vide.

La propagation d'une onde électromagnétique peut être guidée entre les deux conducteurs par réflexions multiples, selon la direction Oz correspondant à l'axe du système.

On envisage la propagation d'un champ électrique de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(r,z,t) = E(r)\exp[i(\omega t - kz)]\vec{e}_r \qquad \text{on pose : } E(a) = E_0$$

1) Déterminer la fonction $E(r)$.
2) Calculer le champ magnétique $\vec{B}(r,z,t)$ en supposant nulle toute composante stationnaire de ce champ. Pourquoi cette restriction n'a-t-elle aucune importance en ce qui concerne la propagation ? Quelle est la structure de l'onde ?
3) En déduire la moyenne temporelle de la puissance transportée par l'onde.
4) Déterminer la moyenne temporelle de la densité linéique d'énergie électromagnétique.
5) Déduire de ces résultats la vitesse de l'énergie v_E ; la relier à la vitesse de phase et à c. Comparer v_E à c et conclure.

<u>On donne en coordonnées cylindriques :</u>

$$div\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

• **CORRIGE** :

« Guide d'onde coaxial »

1) Dans l'espace compris entre les conducteurs, on peut écrire :

$$div\vec{E}=0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{d[rE(r)]}{dr}=0 \Rightarrow rE(r)=cste=aE_0 \quad \Rightarrow \boxed{E(r)=\frac{aE_0}{r}}$$

2) • L'onde n'étant pas plane, on ne peut à priori utiliser la relation de structure des O.P.P.M ; on se sert donc de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}=-\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{E}}=-\frac{\partial E_r}{\partial z}\vec{e}_\theta=ik\frac{E_0a}{r}\exp[i(\omega t-kz)]\vec{e}_\theta=i\omega\underline{\vec{B}} \quad \Rightarrow \boxed{\vec{B}=\frac{E_0a}{r}\times\frac{k}{\omega}\exp[i(\omega t-kz)]\vec{e}_\theta}$$

Rq : une composante stationnaire de $\vec{B}$ multipliée vectoriellement par $\vec{E}$ donnerait pour le vecteur de Poynting une composante proportionnelle à $\cos(\omega t-kz)$, dont la **valeur moyenne temporelle serait nulle** : cette composante stationnaire ne participe donc pas à la propagation moyenne de l'énergie.

• Une relation intrinsèque existe entre les deux champs :

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E} \quad \text{avec: } \vec{k}=k\vec{e}_z}$$

Cette relation est donc similaire à celle vue pour les O.P.P.M, mais elle n'a ici qu'un caractère **local**, l'amplitude des champs n'étant pas constante sur un plan perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{e}_z$; de plus, il ne faudrait pas simplifier k/ω en 1/c, la relation de dispersion étant différente.

3) Donnons l'expression du vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi}=\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}=\left(\frac{E_0a}{r}\right)^2\times\frac{k}{\mu_0\omega}\cos^2(\omega t-kz)\vec{e}_z \Rightarrow \left\langle\vec{\Pi}\right\rangle_T=\left(\frac{E_0a}{r}\right)^2\times\frac{k}{2\mu_0\omega}\vec{e}_z$$

; la puissance transportée est obtenue par intégration sur une section du câble avec un élément de surface $dS=2\pi rdr$:

$$\left\langle P\right\rangle_T=\frac{E_0^2a^2k2\pi}{2\mu_0\omega}\int_a^b\frac{rdr}{r^2} \quad \Rightarrow \boxed{\left\langle P\right\rangle_T=\left\langle P\right\rangle_T=\frac{E_0^2a^2k\pi}{\mu_0\omega}Ln(b/a)}$$

4) Ecrivons la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$\frac{dW_{EM}}{d\tau}=\frac{\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{\varepsilon_0a^2E_0^2}{2r^2}\cos^2(\omega t-kz)+\frac{k^2a^2E_0^2}{2\mu_0\omega^2r^2}\cos^2(\omega t-kz) \Rightarrow \left\langle\frac{dW_{EM}}{d\tau}\right\rangle_T=\frac{E_0^2a^2}{4r^2}\left(\varepsilon_0+\frac{k^2}{\mu_0\omega^2}\right)$$

On écrira : $\varepsilon_0+\frac{k^2}{\mu_0\omega^2}=\varepsilon_0\left(1+\frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)$, puis on intégrera sur une section du câble pour obtenir l'énergie moyenne par unité de longueur (en effet : $d\tau=dSdz=2\pi rdrdz$) ; d'où :

$$\left\langle\frac{dW_{EM}}{dz}\right\rangle_T=\frac{E_0^2a^2}{4}\varepsilon_0\left(1+\frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)\times\int_a^b\frac{2\pi rdr}{r^2} \quad \Rightarrow \boxed{\left\langle\frac{dW_{EM}}{dz}\right\rangle_T=\frac{E_0^2\pi a^2}{2}\varepsilon_0\left(1+\frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)Ln(b/a)}$$

5) Comme dans l'exercice 29.3, on en déduit la vitesse de l'énergie :

$$\boxed{v_E = \frac{\langle P \rangle_T}{\left\langle \dfrac{dW_{EM}}{dz} \right\rangle_T} = \frac{2kc^2\omega}{\omega^2 + k^2c^2} = \frac{2v_\varphi}{1 + \dfrac{v_\varphi^2}{c^2}}}$$ (avec : $v_\varphi = \omega / k$)

Rq : d'après la Relativité, cette vitesse doit être inférieure à c ; écrivons $v_E \le c \Rightarrow$

$\dfrac{2v_\varphi}{1+\dfrac{v_\varphi^2}{c^2}} \le c \;\Rightarrow\; 2v_\varphi c \le c^2 + v_\varphi^2 \;\Rightarrow\; (c - v_\varphi)^2 \ge 0$ **ce qui est toujours vérifié**.